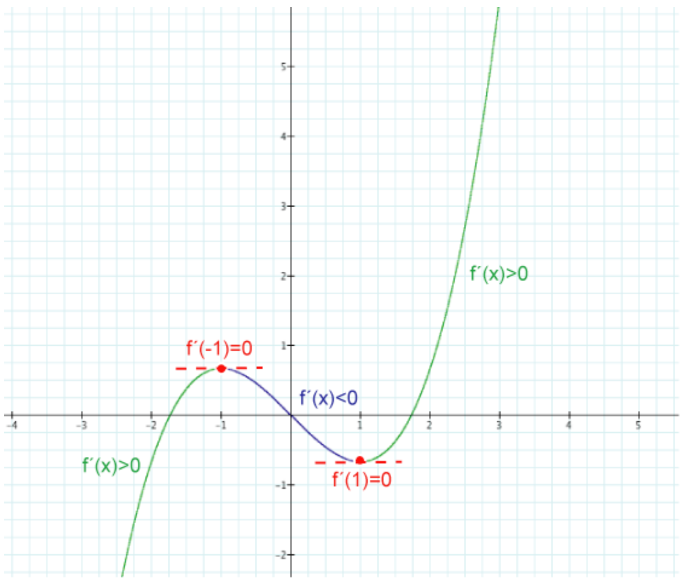
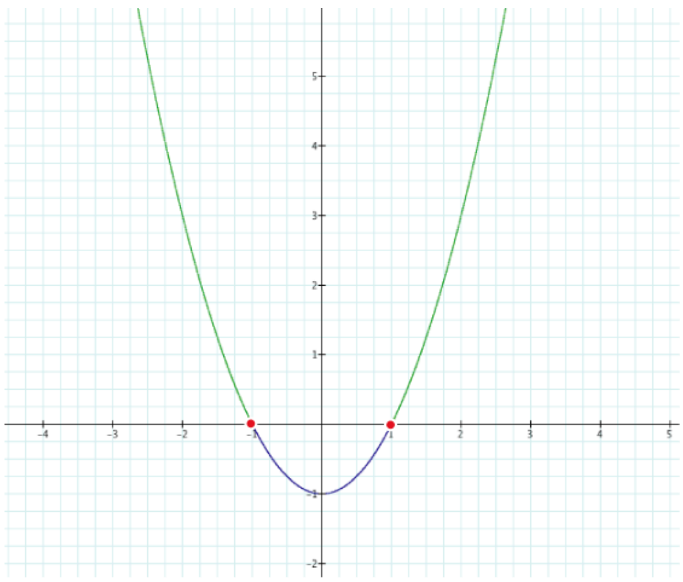
# Ableitung und Monotonie

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x \qquad f'(x) = x^2 - 1$

Graph von f :




Graph von f´:



<u>Definition von Monotonie:</u>

f steigt (fällt) auf $[a;b] \subset D_f$ echt monoton, wenn für $x_1, x_2 \in [a;b]$ gilt:

$x_1 < x_2 \ (x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \ (f(x_1) > f(x_2))$ .

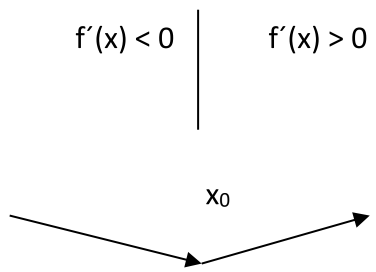
<u>Zusammenhang der Monotonie mit der Ableitung:</u>

Ist $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ für alle $x \in [a;b]$, dann gilt, dass f echt monoton steigt (echt monoton fällt) in [a;b].

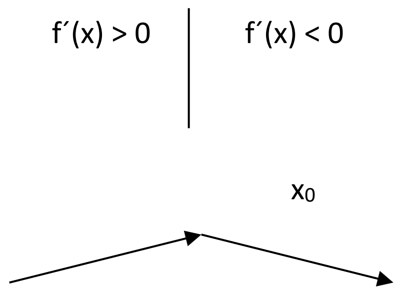
Gilt für ein $x_0 \in D$ $f'(x_0) = 0$, so liegt an dieser Stelle ein Extremum vor.

<u>Bemerkung:</u>

Anhand des Monotonieverhaltens links und rechts einer Stelle $x_0$ (mit $f'(x_0) = 0$) kann man entscheiden, ob es sich bei der Stelle $x_0$ um einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt handelt.




$x_0$ ist ein Tiefpunkt




$x_0$ ist ein Hochpunkt

Aufgaben:

1.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von f.

1.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

2.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

2.1 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von f.

2.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

3.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=-x^3+11x^2-24x$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

3.1 Ermitteln Sie die Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen von f.

3.2 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von f.

3.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

4.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^4+6x^3+9x^2$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

4.1 Ermitteln Sie die Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen von f.

4.2 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von f.

4.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

4.4 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen $G_f$ im Kurvenpunkt mit der Abszisse 1.

4.5 Zeichnen Sie den Graphen $G_f$ der Funktion f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse im Bereich [-3,5;0,5] in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

5.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^3$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

5.1 Untersuchen Sie die Funktion f auf Extrempunkte.

5.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

6.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{4}{3}x^3-8x^2+12x$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

6.1 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von f.

6.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

7.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=1{,}5x^4+8x^3-21x^2-60x+31{,}5$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

7.1 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von f.

7.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

8.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=-\frac{1}{2}x^4-\frac{16}{3}x^3-16x^2+60$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

8.1 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von f.

8.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

9.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^4+x^2$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

9.1 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von f.

9.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

10.0 Überprüfen Sie folgende Aussagen auf ihre Richtigkeit.
Formulieren Sie falsche Aussagen so um, dass sie mathematisch korrekt sind.

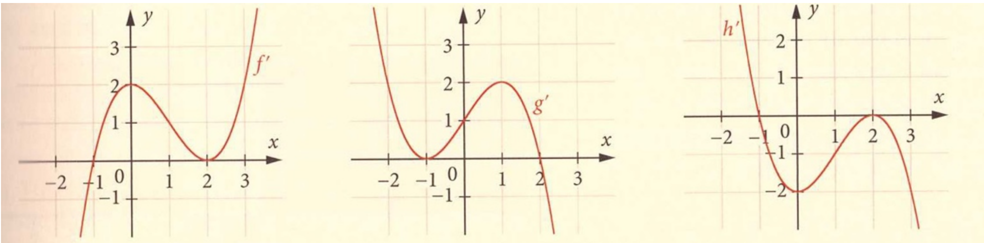
10.1 Die Steigung in einem Punkt des Graphen entspricht der Steigung der Tangente an diesem Punkt.

10.2 Ist der Graph einer Funktion an einer Stelle fallend, dann ist die Steigung an dieser Stelle größer als Null.

10.3 Ist die Ableitungsfunktion eine lineare Funktion, so ist der ausgehende Funktionsgraph eine Parabel.

10.4 Hat die Ableitungsfunktion eine doppelte Nullstelle, dann ändert sich an dieser Stelle das Steigungsverhalten.

11.0 Gegeben sind die Graphen dreier Ableitungsfunktionen f´, g´und h´.
Geben Sie an, für welche der Funktionen f, g und h die folgenden Eigenschaften zutreffend sind.



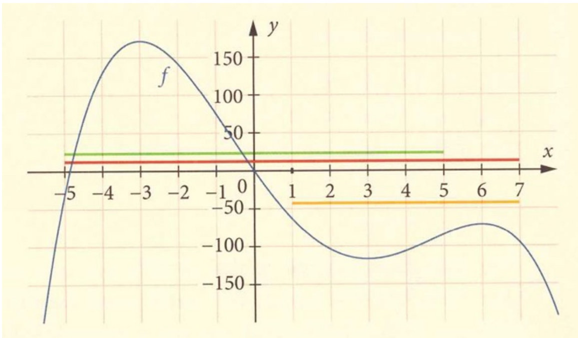

11.1 Der Funktionsgraph hat einen Tiefpunkt bei x = -1.

11.2 Der Funktionsgraph hat einen Hochpunkt bei x = 2.

11.3 Der Funktionsgraph ist streng monoton steigend (x > -1).

11.4 Der Funktionsgraph ist streng monoton fallend (x > -1).

12.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - 72x$.




12.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Art und Lage der Extremstellen und vergleichen Sie Ihre Lösungen mit dem gegebenen Graphen.

12.2 Prüfen Sie, ob die lokalen Extrempunkte auch auf dem gesamten Definitionsbereich die höchsten bzw. tiefsten Punkte sind.

12.3 Ermitteln Sie, wie sich die Art und Lage der Extremstellen ändern, wenn der Definitionsbereich auf die eingezeichneten Intervalle eingeschränkt wird.

Lösungen:

1.1 $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = x^2 - 1$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow x^2 = 1 \quad \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$

Art der Extrema: Skizze von f´

$\Rightarrow x_1 = -1$ HP $\quad x_2 = 1$ TP

y-Koordinaten:

$f(-1) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow HP(-1/\frac{2}{3}) \qquad f(1) = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow TP(1/-\frac{2}{3})$

1.2 Maximale Monotonieintervalle:

$G_f$ ist streng monoton steigend in ]-∞;-1] sowie in [1;∞[

$G_f$ ist streng monoton fallend in [-1;1]

2.1 $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = x^2 + x - 6$

$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \quad \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 2$

Art der Extrema: Skizze von f´

$\Rightarrow x_1 = -3$ HP $\quad x_2 = 2$ TP

y-Koordinaten:

$f(-3) = 21{,}5 \quad \Rightarrow HP(-3/21{,}5) \qquad f(2) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow TP(2/\frac{2}{3})$

2.2 Maximale Monotonieintervalle:

$G_f$ ist streng monoton steigend in ]-∞;-3] sowie in [2;∞[

$G_f$ ist streng monoton fallend in [-3;2]

3.1 Nullstellen: $f(x)=0$

$\Rightarrow -x^3+11x^2-24x=0 \quad \Rightarrow -x(x^2-11x+24)=0 \quad \Rightarrow x_1=0$

$\Rightarrow x^2-11x+24=0 \quad \Rightarrow (x-3)(x-8)=0 \quad \Rightarrow x_2=3 \quad x_3=8$

$\Rightarrow$ f hat drei Nullstellen bei $x_1=0$ (einfach), bei $x_2=3$ (einfach) und bei $x_3=8$ (einfach)

3.2 $\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=-3x^2+22x-24$

$\Rightarrow -3x^2+22x-24=0$

$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{-22\pm\sqrt{484-4\cdot(-3)\cdot(-24)}}{-6}=\frac{-22\pm\sqrt{196}}{-6}=\frac{-22\pm 14}{-6}$

$\Rightarrow x_1=\frac{4}{3} \quad x_2=6$

Art der Extrema: Skizze von f´

$\Rightarrow x_1=\frac{4}{3}$ TP $\quad x_2=6$ HP

y-Koordinaten:

$f(\frac{4}{3})=-14\frac{22}{27} \quad \Rightarrow TP(\frac{4}{3}/-14{,}81) \qquad f(6)=36 \quad \Rightarrow HP(6/36)$

3.3 Maximale Monotonieintervalle:

$G_f$ ist streng monoton fallend in $]-\infty;\frac{4}{3}]$ sowie in $[6;\infty[$

$G_f$ ist streng monoton steigend in $[\frac{4}{3};6]$

4.1 Nullstellen: $f(x)=0$

$\Rightarrow x^4+6x^3+9x^2=0 \quad \Rightarrow x^2(x^2+6x+9)=0 \quad \Rightarrow x_1=0$

$\Rightarrow x^2+6x+9=0 \quad \Rightarrow (x+3)^2=0 \quad \Rightarrow x_2=-3$

$\Rightarrow$ f hat zwei Nullstellen bei $x_1 = 0$ (doppelt) und bei $x_2 = -3$ (doppelt)

4.2 $\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=4x^3+18x^2+18x$

$\Rightarrow 4x^3+18x^2+18x=0 \quad \Rightarrow 2x(2x^2+9x+9)=0 \quad \Rightarrow x_1=0$

$\Rightarrow x_{2/3}=\frac{-9\pm\sqrt{81-4\cdot2\cdot9}}{4}=\frac{-9\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{-9\pm3}{4}$

$\Rightarrow x_2=-1{,}5 \qquad x_3=-3$

Art der Extrema: Skizze von f´

$\Rightarrow x_1=0$ TP $\qquad x_2=-1{,}5$ HP $\qquad x_3=-3$ TP

y-Koordinaten:

$f(0)=0 \quad \Rightarrow TP(0/0) \qquad f(-1{,}5)=5{,}0625 \quad \Rightarrow HP(-1{,}5/5{,}0625)$

$f(-3)=0 \quad \Rightarrow TP(-3/0)$

4.3 Maximale Monotonieintervalle:

$G_f$ ist streng monoton fallend in ]-∞;-3] sowie in [-1,5;0]

$G_f$ ist streng monoton steigend in [-3;-1,5] sowie in [0;∞[

4.4 Tangente: $y=mx+t$

$m=f'(1)=4\cdot1^3+18\cdot1^2+18\cdot1=40$

$P(1/y_P)$ einsetzen:

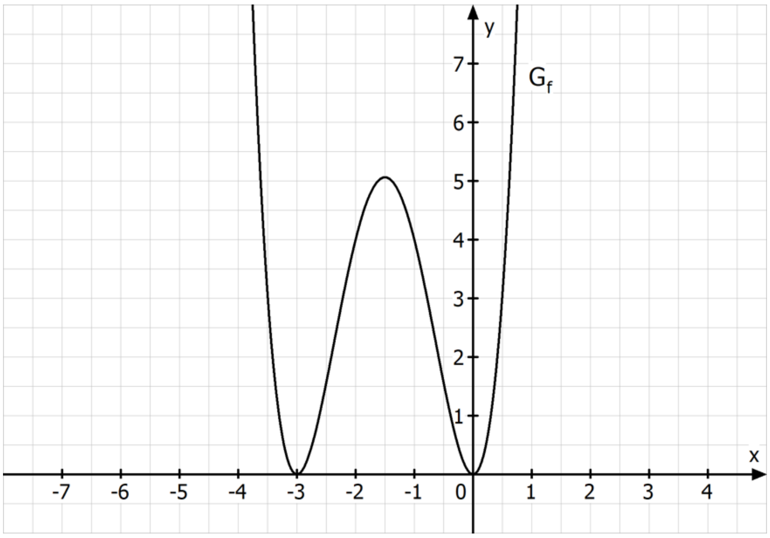
$y_P=f(1)=1^4+6\cdot1^3+9\cdot1^2=16 \quad \Rightarrow P(1/16)$

$\Rightarrow 16=40\cdot1+t \quad \Rightarrow t=-24$

$\Rightarrow y=40x-24$

4.5

| x | -3,5 | -3 | -2 | -1 | 0 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3,0625 | 0 | 4 | 4 | 0 | 3,0625 |




5.1 $f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = 0$

Skizze:

$\Rightarrow$ die Funktion f besitzt keine Extrempunkte

5.2 Maximale Monotonieintervalle:

$G_f$ ist streng monoton steigend in $]-\infty;0]$ sowie in $[0;\infty[$

$G_f$ ist streng monoton steigend in ganz $\mathbb{R}$

6.1

$f'(x) = 4x^2 - 16x + 12$

$\Rightarrow 4x^2 - 16x + 12 = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 3$

Art der Extrema: Skizze von f´

$\Rightarrow x_1 = 1$ HOP $\qquad x_2 = 3$ TIP

y-Koordinaten:

$f(1) = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow HOP(1/\frac{16}{3}) \qquad f(3) = 0 \quad \Rightarrow TIP(3/0)$

6.2

Maximale Monotonieintervalle:

$G_f$ ist streng monoton steigend in ]-∞;1] sowie in [3;∞[

$G_f$ ist streng monoton fallend in [1;3]

7.1

$f'(x) = 6x^3 + 24x^2 - 42x - 60$

$\Rightarrow 6x^3 + 24x^2 - 42x - 60 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = -5 \quad x_3 = 2$

Art der Extrema: Skizze von f´

$\Rightarrow x_1 = -1$ HOP $\quad x_2 = -5$ TIP $\quad x_3 = 2$ TIP

y-Koordinaten:

$f(-1) = 64 \quad \Rightarrow HOP(-1/64) \quad f(-5) = -256 \quad \Rightarrow TIP(-5/-256)$

$f(2) = -84,5 \quad \Rightarrow TIP(2/-84,5)$

7.2

Maximale Monotonieintervalle:

$G_f$ ist streng monoton fallend in ]-∞;-5] sowie in $[-1;2]$

$G_f$ ist streng monoton steigend in [-5;-1] sowie in $[2;\infty[$

8.1

$f'(x) = -2x^3 - 16x^2 - 32x$

$\Rightarrow -2x^3 - 16x^2 - 32x = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -4$

Art der Extrema: Skizze von f´

$\Rightarrow x_1 = 0$ HOP

y-Koordinaten:

$f(0) = 60 \quad \Rightarrow HOP(0/60)$

8.2

Maximale Monotonieintervalle:

$G_f$ ist streng monoton fallend in $[0;\infty[$

$G_f$ ist streng monoton steigend in $]-\infty;-4]$

9.1

$f'(x) = 4x^3 + 2x$

$\Rightarrow 4x^3 + 2x = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 0$

Art der Extrema: Skizze von f´

$\Rightarrow x_1 = 0$ TIP

y-Koordinaten:

$f(0) = 0 \qquad \Rightarrow TIP(0/0)$

9.2

Maximale Monotonieintervalle:

$G_f$ ist streng monoton steigend in $[0;\infty[$

$G_f$ ist streng monoton fallend in $]-\infty;0]$

10.1 Richtige Aussage.

10.2 Falsche Aussage.
Ist der Graph einer Funktion an einer Stelle fallend, dann ist die Steigung an dieser Stelle kleiner als Null.

10.3 Richtige Aussage.

10.4 Falsche Aussage.
Hat die Ableitungsfunktion eine doppelte Nullstelle, dann ändert sich an dieser Stelle das Steigungsverhalten nicht.

11.1 f

11.2 g

11.3 f

11.4 h

12.1

$f'(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 8x^2 + 12x - 72$

$-\frac{4}{3}x^3 + 8x^2 + 12x - 72 = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 6$

Skizze von f´:

$\Rightarrow x_1 = -3$ HOP HOP(−3/171) $\qquad x_2 = 3$ TIP TIP(3/−117)

$x_3 = 6$ HOP HOP(6/−72)

12.2 Der lokale Hochpunkt ist auch der absolute Hochpunkt, einen absoluten Tiefpunkt gibt es nicht.

12.3

$D = [-5;5]$

Lokaler Hochpunkt bei x = -3, lokaler Tiefpunkt bei x = 3

Absoluter Hochpunkt bei x = -3 und absoluter Tiefpunkt bei x = 3

$D = [-5;7]$

Lokaler Hochpunkt bei x = -3, lokaler Tiefpunkt bei x = 3, lokaler Hochpunkt bei x = 6

Absoluter Hochpunkt bei x = -3 und absoluter Tiefpunkt bei x = 3

$D = [1;7]$

Lokaler Tiefpunkt bei x = 3, lokaler Hochpunkt bei x = 6

Absoluter Hochpunkt bei x = 1 und absoluter Tiefpunkt bei x = 3